Шифр:

А₀-5

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

Математика

2018/2019

Ленинградская область

Район Волховский

Школа Волховская СОШ 1

Класс 9

ФИО Сюзев Иван Антонович

1	2	3	4	5	Σ
7	7	X	X	7	21

1

А-5

Чистовик

№1. Пусть $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$. Сумма корней $=-a$, $-c$ по т. Виета

$\Downarrow$

нужно найти $-a-c$.

$$\begin{cases} f(1)=g(2) \\ f(2)=g(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1^2+a\cdot 1+b=2^2+c\cdot 2+d \\ 2^2+a\cdot 2+b=1^2+c\cdot 1+d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+a+b=4+2c+d \\ 4+2a+b=1+c+d \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$-3-a=3+c$

$-a-c=6 \Rightarrow$ сумма корней обоих квадратных трёхчленов равна 6. Ответ: 6.

№2. Рыцарь не мог сказать, что его число больше 10, т.к. если его число больше 10 (≥ 11), то второй фразой он соврал, чего не может быть. Также рыцарь не мог сказать и про то, что его число больше 9, т.к. если его число ≥ 10, то он тоже соврал второй фразой. Значит, рыцарей не больше восьми. Пример, когда рыцарей 8:

Р/Л	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л	Л
задум. число	2	3	4	5	6	7	8	9	9	10
1 фраза	>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10
2 фраза	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10	<1	<2

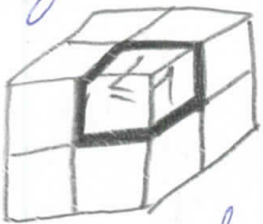
8 рыцарей

Ответ: 8 рыцарей.

Смотри на обороте.

№5. Пусть куб имеет стороны $2n \times 2n \times 2n$. Докажем, что в нём можно закрасить не более, чем $4\cdot n(3n-1)$ клеток. (в каждом уголке $\leq \frac{n(3n-1)}{2}$).

База: $n=1$



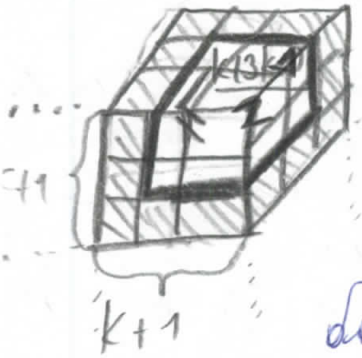
Разобьём куб $2\times2\times2$ на 8 уголков. В каждом из уголков можно закрасить не более одной клетки $\Rightarrow$ всего можно закрасить не более 8 клеток. Пример:

4 - закрашенные клетки

$4\cdot1\cdot(3\cdot1-1)=4\cdot1\cdot2=8$. — верно.

Переход: Пусть верно для всех $n \leq k$. Проверим для $k+1$.

Разобьём куб $2(k+1)\times2(k+1)\times2(k+1)$ на восемь равных уголков.



К уголку со стороной k прибавилась ещё одна граница ( ), состоящая из $3\cdot(2(k+1)-1) = 3(2k+1)=6k+3$ клеточки. Среди них не более половины закрашены, т.к. закрашенные не могут стоять рядом. $6k+3$ — нечётное $\Rightarrow$ закрашенных $\leq \frac{6k+2}{2}=3k+1$.

Значит, в уголке со стороной $k+1$ не более $3k+1+\frac{k(3k-1)}{2}$ закрашенных клеток. $3k+1+\frac{k(3k-1)}{2}=\frac{6k+2+3k^2-k}{2}=\frac{3k+2+3k^2+2k}{2}=$

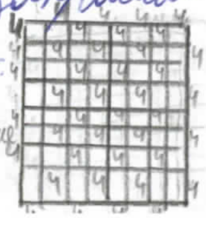
$=\frac{(k+1)(3k+2)}{2}=\frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$ — верно. $\Rightarrow$ это верно для любых n.

$\boxed{2000000+499000\cdot2=2998000}$ Ответ: 2998000 клеток.

Значит, при $n=500$, максимум можно закрасить $4\cdot500\cdot(500\cdot3-1)=$
$=4\cdot500\cdot1499=2998000$. Пример: 4 боковые стороны закрасим в шахматном порядке (2000000 клеток). Верх закрасим так: (в большем объёме клеток)

Тогда таких клеток будет $\frac{1000}{2}-1$ (угловая) $\cdot$ 1000 строк, то есть 499000 клеток и столько же снизу.

примыкающие клетки



6	7	8	9	10	Σ
7	7	Ø	X	0	14

Чистовик

А-5.

№6. Пусть эти числа — $x-1$; x; $x+1$ и $x+2$.

Либо $x \vdots 2$, либо $x+1 \vdots 2$.

I) Если $x \vdots 2$, то $x = 2k$ k-натур. $x > 100 \Rightarrow k > 50$.

Тогда возьмём сумму чисел $(x-1)$; x и $(x+1)$: $(x-1)+x+(x+1) = 3x = 3 \cdot 2 \cdot k$

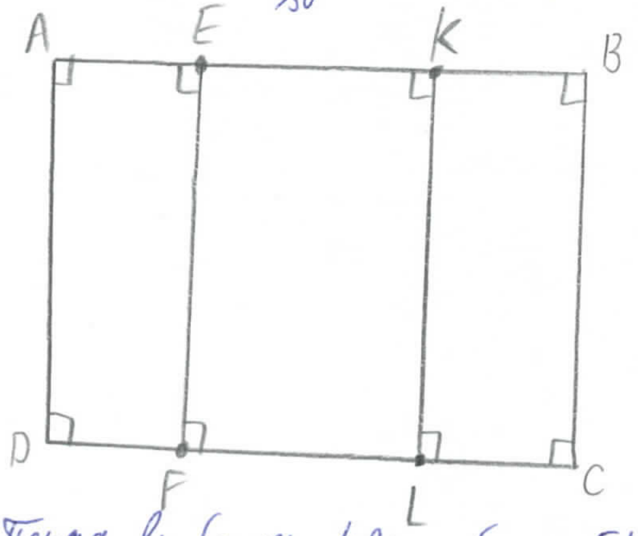
$3 \cdot 2 \cdot \underset{>50}{k}$ — произведение трёх различных натуральных чисел, ~~не равных единице~~. больших единицы

II) Если $x+1 \vdots 2$, то $x+1 = 2k$ k-натур. $x+1 > 100 \Rightarrow k > 50$.

Тогда возьмём сумму чисел x; $(x+1)$ и $(x+2)$: $x+(x+1)+(x+2) = 3x+3 =$

$= 3(x+1) = 3 \cdot 2 \cdot \underset{>50}{k}$ — что и требовалось найти.

№7.



6 прямоугольников: ABCD; AKLD; AEFD; EBCF; EKLF; KBCL. Каждая вершина присутствует ровно в 3 прямоугольниках как вершина.

Ответ: да, может.

№10. Петя выбирает 49 нулей и 51 число $\frac{1}{51}$. Сумма этих 100 чисел будет равна 1.

Как бы Вася не разбивал, хотя бы в одной группе будет 2 числа $\frac{1}{51}$, т.к. нулей всего 49 $\Rightarrow$ в одной из групп (хотя бы в одной) нуля не будет.

Это произведение будет наибольшим, т.к. в одной группе находятся 2 наибольших числа. $\frac{1}{51} \cdot \frac{1}{51} = \frac{1}{2601}$

Ответ: $\frac{1}{2601}$.